コンパクトアソシエーションスキーム

広島大学　大学院先進理工系科学研究科　先進理工系科学専攻　数学プログラム
中田彬文 (Akifumi NAKADA) *

概要

有限アソシエーションスキームとコンパクト等質空間を同時に一般化する概念としてコンパクトアソシエーションスキームを定め，可換な場合に絞って Peter–Weyl の定理や Plancherel の定理が成り立つことを紹介する．

1　導入

有限等質空間やその一般化であるコンパクト等質空間では調和解析が展開でき，Peter–Weyl の定理や Plancherel の定理といった重要な命題が成り立つ [3]．また，有限等質空間の別の一般化である有限アソシエーションスキームでも同様に調和解析が展開できる [1,2]．これらの良く知られた事実については第 2 節で振り返る．第 3 節では，これら 2 方向の一般化を統一的に扱える枠組みとしてコンパクトアソシエーションスキームを定める．また第 4 節では，可換な場合に絞って Peter–Weyl の定理や Plancherel の定理が成り立つことを紹介する．なお，第 3 節以降の内容が主結果である．

$$
\begin{array}{ccc}
\text{コンパクト等質空間} & \subset & \text{コンパクトアソシエーションスキーム} \\
\cup & & \cup \\
\text{有限等質空間} & \subset & \text{有限アソシエーションスキーム}
\end{array}
$$

2　振り返り

2.1　コンパクト等質空間上の調和解析

この小節ではコンパクト等質空間における基礎的な事実と Plancherel 型の定理を紹介する．

G をコンパクト Hausdorff 位相群とする．本稿を通して，空でないコンパクト Hausdorff 空間であって連続か推移的な G 作用を備えるものを**コンパクト等質 G 空間**と呼ぶ．良く知られているように，G の任意の閉部分群 K に対して商空間 G/K は標準的な方法でコンパクト等質 G 空間となる．逆に，任意のコンパクト等質 G 空間はこの方法で得られることも良く知られている．

X をコンパクト等質 G 空間とする．このとき，X 上の G 不変確率 Radon 測度 μ_X が一意に存在し，G 上の確率 Haar 測度の標準的な押し出しと一致する．さらに，X 上の μ_X に関する複素数値 L^2 関数全体の成す Hilbert 空間 $L^2(X)$ は G のユニタリ正則表現となる．

* E-mail: nakada-aki@hiroshima-u.ac.jp

G の既約ユニタリ表現の同型類全体の集合を $\widehat{G}$ と書き，G の**ユニタリ双対**と呼ぶ．また，各 $(\rho\colon G \curvearrowright V_\rho) \in \widehat{G}$ に対して，$L^2(X)$ の ρ 成分 $L^2_\rho(X)$ を単射 G 同変写像

$$V_\rho \otimes \mathrm{Hom}_G(V_\rho, L^2(X)) \to L^2(X),\ v \otimes f \mapsto f(v)$$

の像として定める．つまり，V_ρ を $L^2(X)$ に G 表現として埋め込み，すべての埋め込み方をわたって和をとったものを $L^2(X)$ の ρ 成分と呼び，$L^2_\rho(X)$ と書く．さらに，$L^2(X)$ に現れる既約ユニタリ G 表現の同型類全体の集合 $\widehat{G}_X$ を

$$\widehat{G}_X \coloneqq \left\{\rho \in \widehat{G} \;\middle|\; L^2_\rho(X) \neq 0\right\}$$

と定める．本稿では，ユニタリ G 表現 $L^2(X)$ が multiplicity-free，つまり各 $\rho \in \widehat{G}_X$ に対して $L^2_\rho(X)$ が既約ユニタリ G 表現となるとき，X は Gelfand であると言う．Gelfand コンパクト等質空間に対しては次が成り立つ．

事実 2.1 (Peter–Weyl theorem)**.** G をコンパクト Hausdorff 位相群とし，X を Gelfand コンパクト等質 G 空間とする．このとき，次が成り立つ．

1. $\rho \not\cong \rho'$ なる $\rho, \rho' \in \widehat{G}_X$ に対して，$L^2_\rho(X)$ と $L^2_{\rho'}(X)$ は $L^2(X)$ の部分空間として互いに直交する．
2. 任意の $\rho \in \widehat{G}_X$ に対して $\dim L^2_\rho(X) < \infty$ と $L^2_\rho(X) \subset C(X)$ が成り立つ．
3. ρ 成分達の張る空間 $\sum_{\rho \in \widehat{G}_X} L^2_\rho(X)$ は X 上の複素数値連続関数全体が成す空間 $C(X)$ の中で一様ノルムに関して稠密である．

X を Gelfand コンパクト等質 G 空間とする．$X \times X$ への対角 G 作用を考え，その軌道空間を $\mathcal{I}$ と書き，商写像を $R\colon X \times X \twoheadrightarrow \mathcal{I}$ と書く．このとき，$\mathcal{I}$ はコンパクト Hausdorff 空間であり，$\mathcal{I}$ 上の測度 $\mu_{\mathcal{I}}$ を積測度 $\mu_X \otimes \mu_X$ の R による押し出し $\mu_{\mathcal{I}} \coloneqq R_*(\mu_X \otimes \mu_X)$ で定める．また，離散空間 $\widehat{G}_X$ 上の測度 $\mu_{\widehat{G}_X}$ を $\mu_{\widehat{G}_X}(\{\rho\}) \coloneqq \dim \rho$ で定める．さらに，各 $\rho \in \widehat{G}_X$ に対して，$L^2_\rho(X) \subset C(X)$ より，$L^2_\rho(X)$ の再生核 $\mathcal{K}_\rho \in C(X \times X)$ が定まる．以上を用いて Plancherel 型の定理を述べる．

事実 2.2. G をコンパクト Hausdorff 位相群とし，X を Gelfand コンパクト等質 G 空間とする．このとき，次が成り立つ．

1. 各 $\rho \in \widehat{G}_X$ に対して，$Q_\rho \circ R = \mathcal{K}_\rho$ なる $Q_\rho \in C(\mathcal{I})$ が一意に存在する．
2. $\{Q_\rho\}_{\rho \in \widehat{G}_X}$ は $L^2(\mathcal{I})$ の完全直交系を成す．
3. 各 $f \in L^2(\mathcal{I}, \mu_{\mathcal{I}})$ に対して，$\widehat{G}_X$ 上の関数 $\widehat{f}$ を

$$\widehat{f}\colon \widehat{G}_X \to \mathbb{C},\ \rho \mapsto \frac{1}{\dim \rho}\langle Q_\rho | f\rangle_{L^2(\mathcal{I})}$$

   と定める．このとき，$\widehat{f} \in L^2(\widehat{G}_X)$ である．
4. （Plancherel 型の定理）Fourier 変換

$$L^2(\mathcal{I}) \to L^2(\widehat{G}_X),\ f \mapsto \widehat{f}$$

   は等長同型写像である．

2.2　有限アソシエーションスキームの指標表

この小節では有限アソシエーションスキームにおける基礎的な事実を紹介する．

X を空でない有限集合とする．X 上の有限アソシエーションスキーム構造を次で定める．

定義 2.3. $\mathcal{I}$ を有限集合とし，$R\colon X \times X \to \mathcal{I}$ を写像とする．ここで，次が成り立つとき，R を**有限アソシエーションスキーム** (FAS) と呼ぶ．

(FAS1) $R^{-1}(i_0) = \{(x,x) \mid x \in X\}$ なる $i_0 \in \mathcal{I}$ が存在する．

(FAS2) $R\colon X \times X \to \mathcal{I}$ は全射である．

(FAS3) 任意の $i \in \mathcal{I}$ に対して，$R^{-1}(i^\top) = R^{-1}(i)^\top \coloneqq \{(y,x) \mid (x,y) \in R^{-1}(i)\}$ なる $i^\top \in \mathcal{I}$ が存在する．

(FAS4) 任意の $i_1, i_2, k \in \mathcal{I}$ に対して，ある $p^k_{i_1,i_2} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して，任意の $(x,z) \in R^{-1}(k)$ に対して

$$p^k_{i_1,i_2} = \#\{y \in X \mid R(x,y) = i_1,\ R(y,z) = i_2\}$$

が成り立つ．

さらに，次の (FAS5) が成り立つとき，R は**可換**であると言い，(FAS6) が成り立つとき，R は**対称**であると言う．

(FAS5) 任意の $i_1, i_2, k \in \mathcal{I}$ に対して $p^k_{i_1,i_2} = p^k_{i_2,i_1}$ が成り立つ．

(FAS6) 任意の $i \in \mathcal{I}$ に対して $i^\top = i$ が成り立つ．

また，各 $i \in \mathcal{I}$ に対して，$k_i \coloneqq p^{i_0}_{i,i^\top}$ を i の**次数**と呼ぶ．

$X \times X$ 上の複素数値関数全体の成す空間を $\mathrm{Mat}(X)$ と書く．この空間の元は X で添え字付けられた正方行列とみなせる．$R\colon X \times X \to \mathcal{I}$ を FAS とする．各 $i \in \mathcal{I}$ に対して，$R^{-1}(i) \subset X \times X$ の指示関数を $A_i \in \mathrm{Mat}(X)$ と書く．このとき，$\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ は一次独立である．そこで，$\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ が張る $\mathrm{Mat}(X)$ の部分空間を FAS R の **Bose–Mesner 代数** (BMA) と呼び，$\mathfrak{A}$ と書く．Bose–Mesner 代数 $\mathfrak{A}$ は次の性質を満たす．

1. A_{i_0} は単位行列 I に等しい．
2. $\sum_{i\in\mathcal{I}} A_i$ はすべての成分が 1 の行列 J に等しい．
3. $\mathfrak{A}$ は転置で閉じる．
4. $\mathfrak{A}$ は行列積で閉じる．

さらに，FAS R が可換なら次の 5. が，対称なら 6. が成り立つ．

5. $\mathfrak{A}$ 上の行列積は可換である．
6. 任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $A^\top = A$ が成り立つ．

R を可換な FAS とする．このとき，$\mathfrak{A}$ には行列積に関する原始冪等元から成る基底 $\{E_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ が一意に存在し，さらに次が成り立つ．

1. $\#X E_{j_0} = J$ なる $j_0 \in \mathcal{J}$ が存在する．
2. $\sum_{j\in\mathcal{J}} E_j = I$ である．
3. 任意の $j \in \mathcal{J}$ に対して，$E_{\overline{j}} = \overline{E_j}$ なる $\overline{j} \in \mathcal{J}$ が存在する．
4. 任意の $j \in \mathcal{J}$ に対して，$E_j^* = E_j$ が成り立つ．

X 上の複素数値関数全体の成す空間を $\mathrm{Vec}(X)$ と書く．また，各 $j \in \mathcal{J}$ に対して，$\mathrm{Vec}_j(X)$ と m_j を $\mathrm{Vec}_j(X) \coloneqq \{E_j v \mid v \in \mathrm{Vec}(X)\}$ と $m_j \coloneqq \dim \mathrm{Vec}_j(X)$ で定める．このとき，相異なる $j, j' \in \mathcal{J}$ に対して，$\mathrm{Vec}_j(X)$ と $\mathrm{Vec}_{j'}(X)$ は標準内積について互いに直交する．

$\{E_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ から $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ への基底変換行列を**指標表**と呼び，P と書く．つまり $A_i = \sum_{j\in\mathcal{J}} P(j,i) E_j$

が成り立つように指標表 P を定める．このように定義すると，第一直交関係

$$\sum_{i\in\mathcal{I}}\frac{1}{k_i}\overline{P(j_1,i)}P(j_2,i)=\frac{\#X}{m_{j_1}}\delta_{j_1,j_2}$$

と第二直交関係

$$\sum_{j\in\mathcal{J}}m_j\overline{P(j,i_1)}P(j,i_2)=\#Xk_{i_1}\delta_{i_1,i_2}$$

が成り立つ．

3 コンパクトアソシエーションスキーム

この節ではコンパクトアソシエーションスキームとその Bose–Mesner 代数を定め，重要な性質や例を紹介する．以下 X を空でないコンパクト Hausdorff 空間とし，μ_X を X 上の狭義正 Radon 測度とする．まず，X 上のコンパクトアソシエーションスキーム構造を次で定める．

定義 3.1. $\mathcal{I}$ をコンパクト Hausdorff 空間とし，$R\colon X\times X\to\mathcal{I}$ を連続写像とする．ここで，次が成り立つとき，R を**コンパクトアソシエーションスキーム** (CAS) と呼ぶ．

(CAS1) $R^{-1}(i_0)=\{(x,x)\mid x\in X\}$ なる $i_0\in\mathcal{I}$ が存在する．

(CAS2) $R\colon X\times X\to\mathcal{I}$ は商写像である．

(CAS3) 任意の $i\in\mathcal{I}$ に対して，$R^{-1}(i^\top)=R^{-1}(i)^\top\coloneqq\{(y,x)\mid(x,y)\in R^{-1}(i)\}$ なる $i^\top\in\mathcal{I}$ が存在する．

(CAS4) 任意の Borel 集合 $W_1,W_2\subset\mathcal{I}$ と任意の $k\in\mathcal{I}$ に対して，ある $p^k_{W_1,W_2}\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して，任意の $(x,z)\in R^{-1}(k)$ に対して

$$p^k_{W_1,W_2}=\mu_X(\{y\in X\mid R(x,y)\in W_1,\ R(y,z)\in W_2\})$$

が成り立つ．

さらに，次の (CAS5) が成り立つとき，R は**可換**であると言い，(CAS6) が成り立つとき，R は**対称**であると言う．

(CAS5) 任意の Borel 集合 $W_1,W_2\subset\mathcal{I}$ と任意の $k\in\mathcal{I}$ に対して，$p^k_{W_1,W_2}=p^k_{W_2,W_1}$ が成り立つ．

(CAS6) 任意の $i\in\mathcal{I}$ に対して，$i^\top=i$ が成り立つ．

注意 3.2. 対称な CAS は可換である．

このように定義すると，CAS は有限アソシエーションスキームとコンパクト等質空間の共通の一般化となっている．すなわち，次が成り立つ．

例 3.3 (有限アソシエーションスキーム)**.** 有限アソシエーションスキームは CAS である．より具体的に述べると，有限アソシエーションスキームとは CAS $R\colon X\times X\to\mathcal{I}$ であって，X と $\mathcal{I}$ が有限離散空間であり，μ_X が数え上げ測度であるもののことである．また，可換性や対称性も整合的に定義されている．

例 3.4 (コンパクト等質空間)**.** G をコンパクト Hausdorff 位相群とし，X をコンパクト等質 G 空間，μ_X を X 上の G 不変確率 Radon 測度とする．このとき，$X\times X$ への対角 G 作用による商写像 $R\colon X\times X\to X\times X/\operatorname{diag}G$ は CAS である．また，コンパクト等質空間が Gelfand であることと CAS として可換であることは同値である．

これらに加えて，有限アソシエーションスキームでもコンパクト等質空間でもない CAS が存在する．

次に，Bose–Mesner 代数を定める．$X \times X$ 上の複素数値連続関数全体が成す空間 $C(X \times X)$ は行列代数と同様に，行列積 $\cdot_{\mu_X}$ や Hadamard 積 $\cdot_{\mathrm{H}}$，転置 $-^{\top}$，複素共役 $\overline{-}$，随伴 $-^{*}$ の演算を備えている．ただし，行列積 $\cdot_{\mu_X}$ は

$$A \cdot_{\mu_X} B(x, z) \coloneqq \int_y A(x, y) \cdot B(y, z)\, d\mu_X$$

と定めている．ここで，各 CAS $R\colon X \times X \to \mathcal{I}$ に対して，R の引き戻し $R^{*}\colon C(\mathcal{I}) \to C(X \times X)$ の像 $R^{*}(C(\mathcal{I}))$ を CAS R の **Bose–Mesner 代数** (BMA) と呼び，$\mathfrak{A}$ と書く．Bose–Mesner 代数 $\mathfrak{A}$ は $C(X \times X)$ の部分空間であり，次の性質を満たす．

- (BMA1) (a) あるネット $(I_N)_N \subset \mathfrak{A}$ が存在して，$(I_N)_N$ は Banach 代数 $(C(X \times X), \cdot_{\mu_X}, \|-\|_{\sup})$ の近似単位元である．つまり，任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して，$A \cdot_{\mu_X} I_N \to A$ $(N \to \infty)$ と $I_N \cdot_{\mu_X} A \to A$ $(N \to \infty)$ が成り立つ．
  - (b) $\mathfrak{A} \cdot_{\mu_X} J \subset \mathbb{C}J$ である．ただし，J は値 1 の定数関数である．
- (BMA2) $\mathfrak{A}$ は $(C(X \times X), \cdot_{\mathrm{H}}, \overline{-}, \|-\|_{\sup})$ の単位的 C*部分代数である．
- (BMA3) $\mathfrak{A}$ は転置で閉じる．
- (BMA4) $\mathfrak{A}$ は行列積で閉じる．

さらに，CAS R が可換なら次の (BMA5) が，対称なら (BMA6) が成り立つ．

- (BMA5) $\mathfrak{A}$ 上の行列積は可換である．
- (BMA6) 任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して，$A^{\top} = A$ が成り立つ．

ここでは，CAS R に対して BMA $\mathfrak{A}$ を定めたが，実は X 上の CAS（resp. 可換 CAS，対称 CAS）構造を与えることと BMA（resp. 可換 BMA，対称 BMA）構造を与えることは Gelfand 変換を通すと等価である．これは有限アソシエーションスキームの場合と同様の結果である．また，行列積を BMA 上に制限すると Young の畳み込み不等式と呼ぶべき次の命題が成り立つ．

命題 3.5. $\mathfrak{A}$ を BMA とし，$p, q, r \in [1, \infty]$ は $1/p + 1/q = 1 + 1/r$ を満たすとする．このとき，任意の $A, B \in \mathfrak{A}$ に対して，

$$\mu_X(X) \|A \cdot_{\mu_X} B\|_r \leq \|A\|_p \cdot \|B\|_q$$

が成り立つ．さらに，A と B が共に定数関数の場合は等号が成立する．

4 可換コンパクトアソシエーションスキーム上の Fourier 解析

この節では Peter–Weyl の定理や Plancherel の定理といった，可換有限アソシエーションスキームや Gelfand コンパクト等質空間に対して成り立つことが知られている，解析的に重要な命題が可換な CAS に対しても成り立つことを紹介する．以下，$R\colon X \times X \to \mathcal{I}$ を可換な CAS とし，$\mathfrak{A}$ を R の BMA，$\mathfrak{A}_{L^2} \subset L^2(X \times X)$ を $\mathfrak{A}$ の L^2 完備化とする．このとき，行列がベクトルに作用するように，$L^2(X \times X)$ は $L^2(X)$ に作用する．これを用いて $L^2(X)$ を $\mathfrak{A}_{L^2}$ によって同時固有空間分解する．各線形写像 $j\colon \mathfrak{A}_{L^2} \to \mathbb{C}$ に対して

$$L^2_j(X) \coloneqq \left\{ v \in L^2(X) \;\middle|\; A \cdot_{\mu_X} v = j(A) v \text{ for all } A \in \mathfrak{A}_{L^2} \right\}$$

とおき，$\mathcal{J} \coloneqq \{j \colon \mathfrak{A}_{L^2} \to \mathbb{C} \mid L^2_j(X) \neq 0\}$ とおく．このように定義すると，$j \in \mathcal{J}$ なら，j は同時固有値を表し，$L^2_j(X)$ は同時固有空間を表す．特に，次の CAS における Peter–Weyl の定理を示せる．

定理 4.1 (CAS における Peter–Weyl の定理)**.** $R \colon X \times X \to \mathcal{I}$ を可換な CAS とする．このとき，次が成り立つ．

1. 相異なる $j, j' \in \mathcal{J}$ に対して，$L^2_j(X)$ と $L^2_{j'}(X)$ は $L^2(X)$ の部分空間として互いに直交する．
2. 任意の $j \in \mathcal{J}$ に対して，$\dim L^2_j(X) < \infty$ と $L^2_j(X) \subset C(X)$ が成り立つ．
3. $\sum_{j\in\mathcal{J}} L^2_j(X)$ は $C(X)$ の中で一様ノルムに関して稠密である．
4. $0 \notin \mathcal{J}$ である．

次に，$\mathcal{I}$ と $\mathcal{J}$ の間の Fourier 変換を構成し，Plancherel 型の定理を述べる．$\mathcal{I}$ 上の狭義正 Radon 測度 $\mu_{\mathcal{I}}$ を積測度 $\mu_X \otimes \mu_X$ の R による押し出し $\mu_{\mathcal{I}} \coloneqq R_*(\mu_X \otimes \mu_X)$ で定める．また，離散空間 $\mathcal{J}$ 上の **Plancherel 測度**と呼ばれる狭義正 Radon 測度 $\mu_{\mathcal{J}}$ を $\mu_{\mathcal{J}}(\{j\}) \coloneqq m_j \coloneqq \dim L^2_j(X)$ で定める．さらに，各 $j \in \mathcal{J}$ に対して，Riesz の表現定理より，$j = \langle \omega_j | - \rangle_{\mathfrak{A}_{L^2}}$ なる $\omega_j \in \mathfrak{A}_{L^2}$ が一意に存在する．この ω_j を j の**球関数**と呼ぶ．このとき，次が成り立つ．

定理 4.2. $R \colon X \times X \to \mathcal{I}$ を可換な CAS とする．このとき，次が成り立つ．

1. 各 $j \in \mathcal{J}$ に対して，$\omega_j \in \mathfrak{A}$ である．
2. $\{\omega_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ は $\mathfrak{A}_{L^2}$ の完全直交系を成す．
3. 各 $f \in L^2(\mathcal{I})$ に対して，$\mathcal{J}$ 上の関数 $\widehat{f}$ を
$$\widehat{f} \colon \mathcal{J} \to \mathbb{C},\ j \mapsto \langle \omega_j | f \circ R \rangle_{\mathfrak{A}_{L^2}}$$
と定める．このとき，$\widehat{f} \in L^2(\mathcal{J})$ である．
4. （Plancherel 型の定理）Fourier 変換
$$\mathcal{F} \colon L^2(\mathcal{I}) \to L^2(\mathcal{J}),\ f \mapsto \widehat{f}$$
は等長同型写像である．

また，$L^2(\mathcal{I})$ 上の畳み込み積 $\cdot_{\mu_X}$ を $\mathfrak{A}_{L^2}$ 上の行列積から誘導すると次が成り立つ．

命題 4.3 (畳み込み定理)**.** 任意の $f, g \in L^2(\mathcal{I})$ に対して，$\mathcal{F}(f \cdot_{\mu_X} g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$ が成り立つ．

続いて，これまでに出てきた諸概念について，第 2 節の内容に合わせてもう少し詳しく性質を述べる．まず，各球関数 ω_j について次が成り立つ．

1. $E_j \coloneqq m_j \omega_j \in \mathfrak{A}$ は $L^2_j(X)$ の再生核である．
2. E_j は行列積に関する原始冪等元である．
3. $j_0 \colon A \mapsto \int A \, d\mu_X \otimes \mu_X / \mu_X(X)$ は $\mathcal{J}$ の元であり，$\mu_X(X) E_{j_0} = J$ である．
4. $\overline{j} \colon A \mapsto \overline{j(\overline{A})}$ も $\mathcal{J}$ の元であり，$E_{\overline{j}} = \overline{E_j}$ である．
5. $E_j^* = E_j$ である．
6. $E_j \cdot_{\mu_X} L^2(X) = L^2_j(X)$ である．

次に，写像 Φ_A, Φ_E を以下で定める．

$$\Phi_A \colon L^2(\mathcal{I}) \to \mathfrak{A}_{L^2},\ f \mapsto f \circ R, \qquad \Phi_E \colon L^2(\mathcal{J}) \to \mathfrak{A}_{L^2},\ g \mapsto \sum_{j\in\mathcal{J}} g(j) E_j.$$

このとき，Φ_A と Φ_E は共に等長同型を与え，Fourier 変換 $\mathcal{F}$ は $\Phi_E^{-1} \circ \Phi_A$ に一致する．また，$A \in \mathfrak{A}_{L^2}$

の Fourier 級数展開は次で与えられる．

$$A = \int_j \langle \omega_j | A \rangle \omega_j \, d\mu_{\mathcal{J}} = \sum_{j \in \mathcal{J}} \langle \omega_j | A \rangle E_j.$$

最後に，$\mathcal{I}$ と $\mathcal{J}$ は Banach 代数 $(\mathfrak{A}, \cdot_{\mathrm{H}}, \|-\|_{\sup})$ と $(\mathfrak{A}_{L^2}, \cdot_{\mu_X}, \|-\|_2)$ の指標空間とそれぞれ同相であることが示せる．ただし，$\mathcal{J}$ は離散位相空間とみなしている．

参考文献

[1] E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, and R. Tanaka. Algebraic combinatorics, volume 5. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2021.

[2] P. Delsarte. An algebraic approach to the association schemes of coding theory. Philips Res. Rep. Suppl., (10):vi+97, 1973.

[3] M. Takeuchi. Modern spherical functions, volume 135 of Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. Translated from the 1975 Japanese original by Toshinobu Nagura.